ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΥΝΕΧΩΝ ΜΕΣΩΝ
20 Σεπτεμβρίου 2012

Ονοματεπώνυμο.. Α.Μ.............................

---

1) Θεωρούμε ορθογώνιο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$, και τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματά του $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Έστω ότι οι συνιστώσες ενός καρτεσιανού διανύσματος $\vec{A}$ και ενός καρτεσιανού συμμετρικού τανυστή B σε αυτό το σύστημα είναι $A_1 = 1$, $A_2 = 0$, $A_3 = 3$ και $B_{11} = 1$, $B_{22} = 0$, $B_{33} = 1$, $B_{12} = 5$, $B_{13} = -5$, $B_{23} = 0$ αντίστοιχα. Να βρεθούν οι συνιστώσες των δυο αυτών τανυστών ως προς ένα άλλο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, οι άξονες του οποίου ορίζονται ως προς το αρχικό σύστημα από τα μη μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}_1 = -\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{\alpha}_2 = \vec{e}_1$, $\vec{\alpha}_3 = 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

Λύση: Για τα καινούργια μοναδιαία διανύσματα $\vec{e}'_1$, $\vec{e}'_2$, $\vec{e}'_3$ έχουμε $\vec{\alpha}_1 = -\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \Rightarrow \vec{e}'_1 = \frac{-\vec{e}_2+2\vec{e}_3}{\sqrt{5}}$, $\vec{e}'_2 = \vec{e}_1$, $\vec{\alpha}_3 = 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \Rightarrow \vec{e}'_3 = \frac{2\vec{e}_2+\vec{e}_3}{\sqrt{5}}$. Εύκολα φαίνεται ότι $\vec{e}'_1 \cdot \vec{e}'_3 = 0 \Rightarrow \vec{e}'_1 \perp \vec{e}'_3$, οπότε το νέο σύστημα συντεταγμένων είναι ορθογώνιο Καρτεσιανό σύστημα.
Σύμφωνα με την εξίσωση § 10 (3) ο πίνακας μετασχηματισμού μεταξύ των δυο συστημάτων είναι:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Οπότε οι συνιστώσες του διανύσματος $\vec{A}$ στο νέο σύστημα συντεταγμένων είναι:

$$A' = \Lambda \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{5}} \\ 1 \\ \frac{3}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Για τον τανυστή B έχουμε

$$B' = \Lambda \cdot B \cdot \Lambda^T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{15}{\sqrt{5}} & 1 & \frac{5}{\sqrt{5}} \\ 0 & 5 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -5 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{15}{\sqrt{5}} & \frac{2}{5} \\ -\frac{15}{\sqrt{5}} & 1 & \frac{5}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{5} & \frac{5}{\sqrt{5}} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

2) Μια επίπεδη κίνηση συνεχούς μέσου δίνεται από τις σχέσεις:

$$x = t + \xi^1, \quad y = t^2 + \xi^2.$$

Να βρεθούν οι εξισώσεις:
α) (1 μονάδα) των τροχιών, και

β) (1 μονάδα) των γραμμών ροής.
γ) (0,5 μονάδες) Οι δύο αυτές εξισώσεις συμπίπτουν ή όχι; Γιατί;

Λύση: α) Για να βρούμε την εξίσωση των τροχιών απαλείφουμε το χρόνο στις δυο εξισώσεις και έχουμε $x = t + \xi^1 \Rightarrow t = x - \xi^1$ οπότε τελικά

$$y = (x - \xi^1)^2 + \xi^2.$$

β) Για να βρούμε την εξίσωση των γραμμών ροής υπολογίζουμε αρχικά τις ταχύτητες:

$$v_x = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\xi^i} \Rightarrow v_x = 1, \quad v_y = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{\xi^i} \Rightarrow v_y = 2t.$$

Στη συνέχεια έχουμε:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \Rightarrow \frac{dx}{1} = \frac{dy}{2t} \Rightarrow 2tdx = dy \Rightarrow \int dy = \int 2tdx \Rightarrow y = 2tx + c_1.$$

Η σταθερά c_1 προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες $x_1 = \xi^1$, $x_2 = \xi^2$ για $t = 0$, οπότε $c_1 = \xi^2$ και τελικά

$$y = 2tx + \xi^2.$$

γ) Οι εξισώσεις των γραμμών ροής δεν συμπίπτουν με τις εξισώσεις των τροχιών γιατί ο χρόνος t εμφανίζεται ρητά στην έκφραση της ταχύτητας.

3)Η παραμόρφωση συνεχούς μέσου δίνεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + a(x_1^4 + x_2^2 + x_3^2) \\ x_2' &= x_2 + a(x_2^4 + x_3^2 + x_1^2) \\ x_3' &= x_3 + a(x_3^4 + x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

όπου $0 < a \ll 1$.
α) (0,5 μονάδες) Να εξεταστεί αν η παραμόρφωση είναι απειροστή ή πεπερασμένη και να βρεθεί ο τανυστής παραμόρφωσης.
β) (1 μονάδα) Να βρεθούν τρείς διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους με αρχή το σημείο $A(1, 1, -1)$, των οποίων η καθετότητα να διατηρείται και μετά την παραμόρφωση.
γ) (1 μονάδα) Έστω μια πολύ μικρή σφαίρα ακτίνας ϵ, με κέντρο το σημείο $A(1, 1, -1)$. Να βρεθεί η μορφή της σφαίρας μετά την παραμόρφωση, καθώς και η μεταβολή του όγκου της ως συνάρτηση της ακτίνας ϵ.

Λύση: α) Τα διανύσματα μετατόπισης δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} w_1 &= x_1' - x_1 = a(x_1^4 + x_2^2 + x_3^2) = aw_1' \\ w_2 &= x_2' - x_2 = a(x_2^4 + x_3^2 + x_1^2) = aw_2' \\ w_3 &= x_3' - x_3 = a(x_3^4 + x_1^2 + x_2^2) = aw_3' \end{aligned}$$

Μια παραμόρφωση είναι απειροστή όταν $\dfrac{\partial w_i}{\partial x_j} \ll 1$. Από τις παραπάνω σχέσεις βλέπουμε ότι $\dfrac{\partial w_i}{\partial x_j} = a\dfrac{\partial w_i'}{\partial x_j} = ak \ll 1$ διότι $k = \dfrac{\partial w_i'}{\partial x_j}$ είναι πεπερασμένος αριθμός. Επομένως η παραμόρφωση είναι απειροστή.

Στην περίπτωση απειροστής παραμόρφωσης τα στοιχεία του τανυστή παραμόρφωσης δίνονται από τις σχέσεις $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right]$. Οπότε ο τανυστής παραμόρφωσης είναι:

$$(\epsilon_{ij})_{(x_1,x_2,x_3)} = \begin{pmatrix} 4x_1^3 a & a(x_1+x_2) & a(x_1+x_3) \\ a(x_1+x_2) & 4x_2^3 a & a(x_2+x_3) \\ a(x_1+x_3) & a(x_2+x_3) & 4x_1^3 a \end{pmatrix} \tag{1}$$

β) Ο τανυστής παραμόρφωσης για το σημείο $A(1,1,-1)$ είναι

$$(\epsilon_{ij})_A = \begin{pmatrix} 4a & 2a & 0 \\ 2a & 4a & 0 \\ 0 & 0 & -4a \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Οι ζητούμενες διευθύνσεις καθορίζονται από τα ιδιοανύσματα του πίνακα (2). Οι ιδιοτιμές του πίνακα βρίσκονται από την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} 4a-\lambda & 2a & 0 \\ 2a & 4a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -4a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-4a-\lambda)\left[(4a-\lambda)^2-(2a)^2\right] = 0 \Rightarrow -(4a+\lambda)(6a-\lambda)(2a-\lambda) = 0,$$

και είναι

$$\lambda_1 = 6a, \quad \lambda_2 = 2a, \quad \lambda_3 = -4a. \tag{3}$$

Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 6a$ βρίσκεται από τη λύση του συστήματος

$$\begin{pmatrix} -2a & 2a & 0 \\ 2a & -2a & 0 \\ 0 & 0 & -10a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} -2ax_1+2ax_2=0 \\ 2ax_1-2ax_2=0 \\ -10ax_3=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 = x_1 \\ x_3 = 0 \end{array}\right. .$$

Θέτοντας αυθαίρετα $x_1 = 1$ παίρνω ένα ιδιοδιάνυσμα της μορφής

$$\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Δουλεύοντας αντίστοιχα και για τις 2 άλλες ιδιοτιμές βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα

$$\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\vec{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Τα 3 αυτά ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους, αφού τα εσωτερικά τους γινόμενα είναι μηδέν.

γ) Η σφαίρα θα μετασχηματιστεί σε τριαξονικό ελλειψοειδές. Στην περίπτωση απειροστής παραμόρφωσης ο συντελεστής κυβικής διαστολής θ ισούται με το ίχνος του ο τανυστή παραμόρφωσης (2)

$$\theta = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4a > 0. \tag{7}$$

Επειδή ο συντελεστής κυβικής διαστολής είναι θετικός καταλαβαίνουμε ότι ο όγκος της απειροστής σφαίρας θα αυξηθεί. Αρχικά ο όγκος της σφαίρας είναι $V_1 = \frac{4}{3}\pi\epsilon^3$ και ο τελικός όγκος του ελλειψοειδούς $V_2 = (1+\theta)V_1$. Οπότε η μεταβολή του όγκου είναι $\Delta V = V_2 - V_1 = \theta V_1 = \frac{16a}{3}\pi\epsilon^3$.

4) α) (1 μονάδα) Να διατυπώσετε την εξίσωση της συνέχειας εξηγώντας ποια είναι τα μεγέθη που εμφανίζονται σε αυτή. Ποιο είναι το φυσικό της νόημα;
β) (1,5 μονάδες) Να γράψετε την εξίσωση της συνέχειας για μια μόνιμη ροή σε επίπεδο παράλληλο στο επίπεδο Ox_1x_2 με πεδίο ταχυτήτων $v_1 = v_1(x_2)$, $v_2 = v_2(x_1, x_2)$ και πυκνότητα $\rho = \rho(x_1)$.

Λύση: α) Η εξίσωση της συνέχειας εκφράζει τη διατήρηση της μάζας μιας υλικής περιοχής ενός συνεχούς μέσου, συναρτήσει των μεταβλητών του Euler, και δίνεται από τις ισοδύναμες σχέσεις

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}) = 0, \tag{8}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla(\vec{v}) = 0, \tag{9}$$

όπου ρ η πυκνότητα, $\vec{v}$ η ταχύτητα και t ο χρόνος.
β) Έχουμε $v_1 = v_1(x_2)$, $v_2 = v_2(x_1, x_2)$, $\rho = \rho(x_1)$ οπότε από την (8) παίρνουμε

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(x_1)\frac{\partial v_1(x_2)}{\partial x_1} + v_1(x_2)\frac{\partial \rho(x_1)}{\partial x_1} + \rho(x_1)\frac{\partial v_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} + v_2(x_1, x_2)\frac{\partial \rho(x_1)}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1\frac{\partial \rho}{\partial x_1} + \rho\frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0.$$